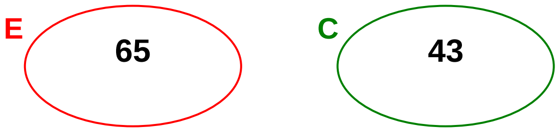
Operaciones con conjuntos

Problema

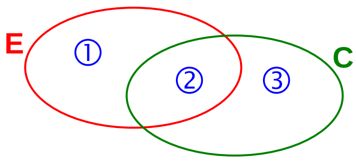
En el barrio El Zorzal hay 85 chicos en edad de realizar estudios primarios; 65 de ellos asisten a la escuela y 43 concurren regularmente a un comedor comunitario.

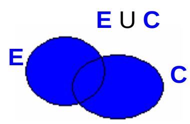
a) *¿Cuántos concurren a la escuela y al comedor?*
b) ¿Cuántos de los que van a la escuela no asisten al comedor?
c) ¿Cuántos de los que van al comedor no concurren a la escuela?

Para averiguar las respuestas son útiles los **diagramas de Venn**.
Diagrama **E**: chicos que asisten a la escuela. Cada uno es un elemento del conjunto **E**.
Diagrama **C**: chicos que concurren al comedor comunitario. Son los elementos de **C**.



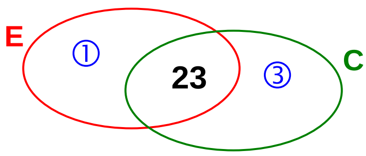
Como hay chicos que pertenecen a ambos conjuntos, dibujaremos a dichos conjuntos *encimados*. Quedan definidas así tres regiones: ①, ② y ③. Grafican la **unión** de los dos conjuntos: **E U C.**

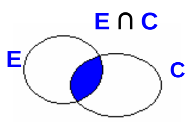




a) La suma de 65 y 43 (108), es mayor que la cantidad total de chicos (85). La diferencia es el número de asistentes a la escuela y al comedor. Son (65+43) - 85 = 108 - 85 = **23** chicos.
Ubicamos **23** en la zona ②**,** que grafica la **intersección** de los conjuntos **E** y **C**.
Se simboliza **E ∩ C.**

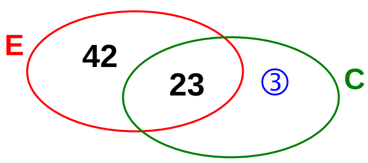
***Respuesta**: concurren a la escuela y al comedor **23** chicos.*

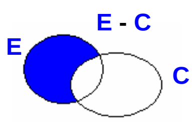




b) Ubicaremos ahora la cantidad de chicos que asisten a la escuela y no al comedor. Se obtiene así: 65-23 = **42**. Instalamos esa cantidad en la zona ①, que grafica la **diferencia** entre los conjuntos **E** y **C**.
Se simboliza **E - C**.

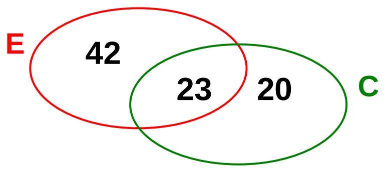
***Respuesta**: concurren a la escuela y no al comedor **42** chicos.*

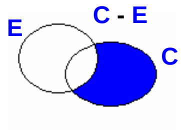




c) Por último, la cantidad de chicos que asisten al comedor pero no a la escuela. Se obtiene de esta manera: 43-23 = **20**. Ubicamos esa cantidad en la zona ③, que corresponde a la diferencia entre los conjuntos **C** y **E**.
Se simboliza **C - E**.

***Respuesta**: concurren al comedor y no a la escuela 20 chicos.*





Verificamos sumando las tres cantidades instaladas en los diagramas. *La suma es 85.* ✓

Cardinal de la unión de conjuntos

- En la **unión** de dos conjuntos, la cantidad de elementos es igual a la suma de los elementos de ambos conjuntos, menos los elementos pertenecientes a la intersección (de lo contrario, éstos se contarían dos veces…).

$\mathbf{n_A}$: número (cantidad) de elementos del conjunto A. Se denomina **cardinal de A**.

$\mathbf{n_B}$: número (cantidad) de elementos del conjunto B. Se denomina **cardinal de B**.

$$\boxed{n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}}$$

En el problema anterior:

$n_E = 65$ (el cardinal del conjunto **E** es 65)

$n_C = 43$ (el cardinal del conjunto **C** es 43)

$n_{E \cup C} = 85$ (el cardinal de la unión es 85)

$n_{E \cap C} = 23$ (el cardinal de la intersección es 23)

Reemplazando en la fórmula $n_{E \cup C} = n_E + n_C - n_{E \cap C}$ obtenemos una igualdad numérica verdadera:

$$85 = 65 + 43 - 23$$
$$85 = 85$$ ✓

Otro problema

Se hace una encuesta sobre el uso de dos tipos de zapatillas: el 80 % de los encuestados usa de lona, el 30 % de cuero y el 10 % ninguna de las dos. Calculemos los porcentajes de los que usan exclusivamente zapatillas de lona, sólo de cuero y ambos tipos.

$$n_L = 80\%$$

$$n_C = 30\%$$

Como el conjunto universal o referencial corresponde al 100%, si el 10% no usa ninguno de los dos tipos de zapatillas, entonces el 90% está constituido por los que usan zapatillas sólo de lona, sólo de cuero o de ambos tipos. Por lo tanto, $n_{L\cup C} = 90\%$.

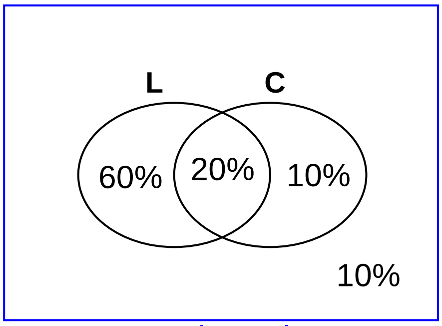
- El 10 % corresponde al *complemento* de L∪C, que se escribe $\overline{L\cup C}$.

$n_{L\cup C} = n_L + n_C - n_{L\cap C}$

$90\% = 80\% + 30\% - n_{L\cap C}$

$n_{L\cap C} = 80\% + 30\% - 90\%$

$\boxed{n_{L\cap C} = 20\%}$



Universal

$n_{L-C} = 80\% - 20\%$

$\boxed{n_{L-C} = 60\%}$

$n_{C-L} = 30\% - 20\%$

$\boxed{n_{L-C} = 10\%}$

Respuesta

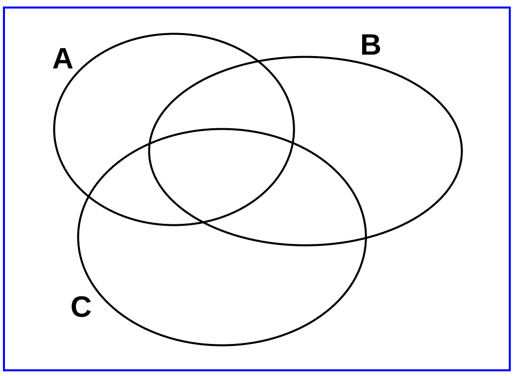
El 60% usa sólo zapatillas de lona.

El 10% usa sólo zapatillas de cuero.

El 20% usa ambos tipos de zapatillas.

En este problema no se ha trabajado con cardinales (o sea, cantidades de elementos) sino con porcentajes, pero el tratamiento es análogo.

- Si los conjuntos son tres, hay 3 categorías de elementos: los que pertenecen a un solo conjunto, a dos de ellos, o bien la los tres conjuntos simultáneamente.



La cantidad total de elementos, o sea, el cardinal de $A \cup B \cup C$ es la suma de los cardinales de los tres conjuntos, menos los cardinales de cada una de las tres intersecciones de dos conjuntos ($A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$), más el cardinal de la intersección de los tres ($A \cap B \cap C$).

$$\boxed{n_{A \cup B \cup C} = n_A + n_B + n_c - n_{A \cap B} - n_{B \cap C} - n_{C \cap A} + n_{A \cap B \cap C}}$$