Resolución de ecuaciones sin pasajes de términos ni propiedades uniformes

Omar A. Cabrera y Gladys E. Fusco

Resumen

Se presenta un método para resolver ecuaciones sencillas, basado en la comparación con modelos numéricos construidos para tal fin. Resultó de utilidad en primeros cursos de escuelas medias argentinas (13-14 años y adultos) para introducir el álgebra sin provocar una ruptura abrupta con la aritmética y, fundamentalmente, ayudar a los estudiantes a construir los invariantes operatorios adecuados (concepto de ecuación, propiedades de las operaciones y convenciones, conservación del valor de verdad de una igualdad) para justificar sus acciones y realizar procedimientos con eficacia.

Propuesta didáctica

Se proponen tres procedimientos sucesivos para resolver ecuaciones en las que la incógnita aparece una sola vez, considerando como referencial el conjunto de los números naturales. **El objetivo es construir *una herramienta* que llamaremos IPC, a utilizar como modelo para resolver ecuaciones literales y en cualquier referencial numérico**. Se trata de una propuesta didáctica para enseñar a resolver ecuaciones en los primeros cursos del nivel medio (13-14 años y adultos), evitando la aplicación de procedimientos que lleven a una rápida mecanización y la frecuente pérdida de la justificación matemática.
Los fundamentos teóricos, los ejercicios que pueden constituir una preparación previa facilitadota y las aclaraciones metodológicas son detallados luego de los ejemplos, a fin de dinamizar la presentación.

Primer procedimiento
Sustituciones sucesivas de la incógnita

La consigna es: ***resolvamos la siguiente ecuación en N:***

$$\frac{40}{20-3.x}=8$$

¿Es x=1? No *¿Es x=2?* No ……… *¿Es x=5?* ***Sí*** , pues 8 = 8

Entonces **S = { 5 }**

Segundo procedimiento: Desandando el camino

El "desarme mental" de la ecuación graficado con curvas cerradas

$$\frac{40}{20-3.x}=8$$

Si conociéramos el valor de x, ***¿en qué orden resolveríamos las operaciones?***

$$\overset{3}{}\frac{40}{20\underset{2}{-}3\underset{1}{.}x}=8$$

Comencemos a desarmar la ecuación eliminando la operación **3:**
¿40 dividido qué número es igual a 8? **Respuesta: 5**
Graficamos:

$$\overset{3}{}\frac{40}{20\underset{2}{-}3\underset{1}{.}x}=8$$

5

La operación **3** quedó fuera de la curva **roja**

Continuemos desarmando la ecuación, eliminando la operación **2**:
¿20 menos qué número es igual a 5? **Respuesta: 15**
Graficamos:

$$\overset{3}{}\frac{40}{20\underset{2}{-}3\underset{1}{.}x}=8$$

5

15

La operación **2** quedó fuera de la curva **verde**

Sigamos desarmando, eliminando por último la operación **1**:
¿3 por qué número es igual a 15? **Respuesta: 5**. Es la solución de la ecuación.
Graficamos:

$$\overset{3}{}\frac{40}{20\underset{2}{-}3\underset{1}{.}x}=8$$

5

15

S = { 5 }

La operación **1** quedó fuera de la curva **violeta**

Tercer procedimiento

El "desarme escrito" de la ecuación

Numeramos las operaciones como en el procedimiento anterior:

$$40\overset{3}{-}\frac{26}{x\underset{1}{+}6}\overset{2}{}=38$$

Comencemos a desarmar la ecuación eliminando la operación **3:**
¿40 menos qué número es igual a 38? **Respuesta: 2**

$$\frac{26}{x+6}=2$$

Continuemos desarmando la ecuación, eliminando la operación **2**:
¿26 dividido qué número es igual a 2? **Respuesta: 13**

$$x+6=13$$

Sigamos desarmando, eliminando por último la operación **1**:
¿Qué número más 6 es igual a 13? **Respuesta: 7**. Es la solución de la ecuación.

$$x=7$$

Una vez ejercitado este último procedimiento, planteamos resolver ecuaciones literales como la siguiente, para lo cual debe construirse un modelo numérico análogo que llamamos **IPC** (*invento para comparar*) con números naturales pequeños.

<u>*Aplicación:*</u> **Resolución de una ecuación literal**

"Invento para comparar" (**IPC**) una ecuación análoga con naturales pequeños para *desarmarla* como en el tercer procedimiento. Elijo **x=5**.

Consigna: ***Despejar X***

$$\frac{C}{A-X}+D=E \qquad\qquad \frac{32}{9-X}+2=10$$

¿Qué número más 2 es 10? Respuesta: **8**

$$\frac{C}{A-X}=E-D \quad \xleftarrow{\text{Entonces resto}} \quad \frac{32}{9-X}=8$$ (equivale a resolver 10-2)

Si bien se ha resuelto "mentalmente" una ecuación de solución **8**, observando la escritura de ambas ecuaciones diremos que **10 y 2 se han transformado en el 8.** Actuando por comparación, corresponde restar **E - D** en la ecuación literal.

¿32 dividido qué número es 8? Respuesta: **4**

$$A-X=\frac{C}{E-D} \quad \xleftarrow{\text{Entonces divido}} \quad 9-X=4$$ (equivale a resolver 32:8)

¿9 menos qué número es 4? Respuesta: **5**

$$X=A-\frac{C}{E-D} \quad \xleftarrow{\text{Entonces resto}} \quad X=5$$ (equivale a resolver 9 - 4)

<u>*Respuesta*</u>:

$$\boxed{X=A-\frac{C}{E-D}}$$

<u>*Aplicación:*</u> **Ecuaciones simultáneas**

El mismo método de resolución aplicado arriba a una ecuación con letras, puede aplicarse a ecuaciones con números de distintos conjuntos referenciales, como en el ejemplo siguiente. Los números indicados en el ángulo inferior derecho de cada celda obedecen al orden secuencial de escritura. Los casilleros con 0 son los que se completan inicialmente, antes de comenzar con las acciones resolutivas, pues contienen las consignas y las ecuaciones a resolver. Se trata, entonces, de solucionar simultáneamente la ecuación literal y las ecuaciones con enteros y racionales de la primera fila, *las tres poseedoras de la misma estructura*. La primera persona del singular representa el accionar del sujeto que resuelve.

Despejar x 0	**Resolver en Z** 0	**Resolver en Q** 0	**IPC Elijo x=2** 1
$A-\frac{H}{x+B}=M$ 0	$-12-\frac{50}{x+18}=-2$ 0	$\frac{4}{5}-\frac{23}{x+6}=\frac{2}{3}$ 0	$8-\frac{18}{x+4}=5$ 2
$\frac{H}{x+B}=A-M$ 4	$\frac{50}{x+18}=-12-(-2)=-10$ 5	$\frac{23}{x+6}=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ 6	$\frac{18}{x+4}=3$ ($\Rightarrow$ 8- 5) 3
$x+B=\frac{H}{A-M}$ 8	$x+18=\frac{50}{-10}=-5$ 9	$x+6=23:\frac{2}{15}=\frac{345}{2}$ 10	$x+4=6$ ($\Rightarrow$ 18:3) 7
$x=\frac{H}{A-M}-B$ 12	$x=-5-18=-23$ 13	$x=\frac{345}{2}-6=\frac{333}{2}$ 14	$x=2$ ($\Rightarrow$ 6- 4) 11

1: *Elijo el número natural que solucionará el IPC ("Invento para comparar"), en este caso, x=2.*

2: *Construyo un "invento para comparar"*. Es una ecuación con solución 2, modelo sencillo de las tres ecuaciones a resolver, construida con números naturales pequeños a efectos de facilitar su resolución mental.

3: ***¿8 menos qué número da 5?*** Respuesta:***3***. Se resuelve así, mentalmente, una primera ecuación, obteniéndose una ecuación reducida. Puede observarse que esa reducción obedece, en la escritura, al reemplazo de los números 8 y 5 por el 3. Diremos aquí que **los números 8 y 5 se han transformado en el 3**, realizando después una nueva pregunta: ***¿mediante qué operación pueden transformarse el 8 y el 5 en el 3?*** Respuesta: ***8-5***. Y ahora la inferencia decisiva: si *resté 8-5 deberé realizar las sustracciones correspondientes* (***minuendo menos resta***) *en las tres ecuaciones a resolver*.

4, 5 y **6**: *Escribo <u>sustraendo es igual a minuendo menos resta</u> y, en las ecuaciones numéricas, resuelvo*.

7: ***¿18 dividido qué número da 3?*** Respuesta:***6***. Se obtiene otra ecuación reducida equivalente al reemplazo de los números 18 y 3 por el 6. Diremos que **los números 18 y 3 se han transformado en el 6** y preguntaremos**:** ***¿mediante qué operación pueden transformarse el 18 y el 3 en el 6?*** Respuesta: ***18:3***. La inferencia del caso es: *si dividí 18**:**3 deberé realizar las divisiones correspondientes* (***dividendo dividido cociente)*** *en las tres ecuaciones a resolver*.

8, **9** y **10**: *Escribo <u>divisor es igual a dividendo dividido cociente</u> en las tres ecuaciones, resolviendo las operaciones en las numéricas*.

11: ***¿Qué número más 4 da 6?*** Respuesta:***2***. Se obtiene otra ecuación reducida equivalente al reemplazo de los números 4 y 6 por el 2. **Los números 4 y 6 se han transformado en el 2.** Preguntamos**:** ***¿mediante qué operación pueden transformarse el 4 y el 6 en el 2?*** Respuesta: ***6-4***. La inferencia es: *si resté 6-4 deberé realizar las sustracciones correspondientes* (***suma menos sumando que no contiene la incógnita***) *en las tres ecuaciones a resolver*.

12, **13** y **14**: *Escribo <u>incógnita es igual a suma menos sumando</u> en las tres ecuaciones y resuelvo las operaciones en las numéricas*.

Fundamentos, ejercitación y balance

La experiencia surgió de la necesidad de justificar matemáticamente los primeros pasos del álgebra con argumentos aceptables para los estudiantes, no de manera formal, asociada sólo a la comprensión, sino instrumental, esto es, adoptable naturalmente para la acción reflexiva. Se pretendió que dicha comprensión estuviera basada en convicciones surgidas de construcciones previas, sacrificando, en el nivel de estudio señalado, el rigor formal de los métodos axiomáticos.

Las investigaciones del Dr. Aníbal Cortés sobre las tareas invariantes y sus invariantes operatorios asociados (teoría de campos conceptuales de Gérard Vergnaud) permitieron fundamentar, precisar y proyectar los primeros ensayos empíricos, realizados ante la necesidad de mejorar el aprendizaje de la matemática en escuelas medias de población estudiantil muy afectada social y económicamente (adolescentes y adultos). Las pocas posibilidades reales de estudio en los hogares y la baja carga horaria de la asignatura en ciertas escuelas, imponen el desafío de favorecer al máximo el aprendizaje en el aula. La justificación matemática, siempre enseñada y muchas veces abandonada, es la característica central adoptada para enfrentar tal desafío. En ese sentido, pensamos que **la enseñanza (explícita, organizada, sistemática) de las tareas invariantes, ayuda al estudiante a construir invariantes operatorios adecuados para justificar sus transformaciones algebraicas y aplicar métodos de resolución con eficacia.**

Sobre el primer procedimiento:

Es uno de los habituales en el comienzo de la enseñanza de la resolución de ecuaciones debido a su tratamiento meramente aritmético. La denominación de pre-álgebra al nivel de

estudio del que hablamos, es elocuente. En el comienzo del tránsito natural de la aritmética al álgebra predominan las acciones aritméticas.
Como base característica de los conocimientos previos necesarios se encuentra la ***convención de orden de resolución***, reemplazante aquí de la tradicional "separación en términos", porque favorece la enseñanza de una de las tareas invariantes en la resolución de ecuaciones planteadas por el Dr. Cortés, cual es **la identificación de la operación prioritaria**. Tal convención, el invariante operatorio asociado, puede sintetizarse así:

1º) Operaciones entre paréntesis.
2º) Adiciones y sustracciones.
3º) Multiplicaciones y divisiones.

La inclusión de potenciaciones y radicaciones no presentará mayores dificultades.
El análisis de la ecuación, otra tarea invariante, implica la interpretación de la misma como un ejercicio de cálculo combinado del que se conoce el resultado pero no así uno de los números participantes. **El control de la validez de la acción**, tercera tarea invariante realizada, se efectúa al corroborarse el valor de verdad "verdadero" de la igualdad 8=8 obtenida al reemplazar la incógnita por 5, lo que constituye el invariante operatorio asociado a dicho control. Las tres tareas invariantes señaladas se realizan sin excepciones en la resolución de ecuaciones, constituyendo por tal razón elementos muy importantes para su enseñanza.

Sobre el segundo procedimiento:

Durante la ejercitación del procedimiento anterior, naturalmente, algunos alumnos comienzan a "desarmar mentalmente la ecuación", para ahorrar tiempo y esfuerzo. Explicitamos dicha acción mediante el trazado de curvas cerradas, realizando además otra explicitación: **la identificación de las operaciones prioritarias**. Cada curva encierra el primer miembro de una ecuación reducida implícita, la cual mantiene esa característica para que la atención del aprendiz se centre en la numeración de las operaciones y el hecho de la reducción en sí. Se trata de explicitar la reducción y no la ecuación reducida, manteniendo la mayor cercanía posible al procedimiento mental.

Sobre el tercer procedimiento:

Se explicitan las ecuaciones reducidas producidas al "desarmar la ecuación" mediante la formulación de las preguntas indicadas en el procedimiento anterior, preguntas que implican la resolución mental de distintas ecuaciones con números naturales. Es necesaria una práctica intensa de este procedimiento porque es la base del siguiente, de mayor nivel de generalización.

Hasta aquí, tres procedimientos ensayados con rendimiento "aceptable" (40% de alumnos de escuelas para familias en condiciones socio-económicas desfavorables, de Buenos Aires, aplicaron correctamente el tercero). A continuación, el "desarme escrito" constituirá una herramienta para resolver ecuaciones literales por comparación, dando un importante paso en el alejamiento de la aritmética y el acercamiento al álgebra, sin producirse ruptura alguna.

Resolución de ecuaciones literales mediante la construcción de un modelo numérico (IPC):

El estudiante construye una ecuación que modeliza la ecuación literal (IPC, “invento para comparar”, denominación adoptada por un grupo de alumnos), con números naturales pequeños que le permitirán “desarmarla por escrito”. En ese proceso de “desarme” cada nueva ecuación presenta un nuevo número y se observa una regularidad: *ese número reemplaza a otros dos, de la ecuación anterior, y existe una operación que los relaciona.* La necesidad de la unicidad de esa operación implicará tomar ciertos cuidados en la selección del IPC, como evitar el 0 y el 1 o la reiteración de números 2 en el planteo o en los resultados parciales (pues 4:2=2, 4-2=2, $\sqrt{4}=2$). *El análisis de la ecuación* toma significación en la construcción del IPC y el control de la validez de las acciones está efectuado por los cálculos numéricos implicados en su sucesiva reducción. El invariante operatorio es *la conservación del valor de verdad de las igualdades numéricas obtenidas entre los dos números que “desaparecen” de una ecuación y el nuevo número que “aparece” en la reducida*. En este momento, hablamos por primera vez de ***transformación*** de esos dos números en el tercero, abonando el terreno para la caracterización de *expresiones algebraicas transformadas*, concepto a seguir construyendo en cursos posteriores. A esta altura de las prácticas, la explicitación de la prioridad de las operaciones mediante su numeración suele ser prescindible.

Las ecuaciones simultáneas (en realidad, “de resolución simultánea”):

En esta última propuesta, la generalización manifestada al resolver las tres ecuaciones con el mismo modelo numérico, implica un acercamiento al álgebra. En efecto, se realiza una abstracción de los números naturales del IPC, abstracción que puede favorecerse con la utilización de la nomenclatura correspondiente. Si en vez de ***5-8*** el alumno puede verbalizar la acción como ***minuendo menos resta****,* habrá logrado expresar concientemente la abstracción poniendo el lenguaje en consonancia con la generalización algebraica.
En esta línea de trabajo es importante, desde los comienzos del cálculo aritmético, ejercitar regularmente esa nomenclatura e identificar los distintos elementos en ejercicios numéricos y literales como el siguiente:

- Completa la tabla:

	$A - B:C^L + \sqrt{P.F - Q}$	$H.C - M:P^{A+B}$	$\sqrt[T]{B - A - Q^P} + V^R$	$A - \dfrac{B + C.D}{\sqrt{W - H^L}}$
Sumandos				
Sustraendos			A y Q^P	
Minuendos			B y B - A	

La primera columna continúa con: Factores, Dividendos, Divisores, Bases, Exponentes, Radicandos e Índices.

No se pretende que los estudiantes lleguen a memorizar relaciones como ”divisor es igual a dividendo dividido cociente” para la resolución de ecuaciones, sino que puedan enfrentar nuevas situaciones con modelos construidos utilizando conocimientos previos. Esos modelos serán justificación y fundamento, elementos imprescindibles para la construcción de los campos conceptuales pertinentes al tema en estudio.
Es posible que muchos pupitres u hojas de borrador hayan escondido, a veces con vergüenza, modelos numéricos como los descriptos. Hemos solicitado a personas que habían concluido sus estudios secundarios hacía dos o tres años, la resolución de una ecuación con números reales cualesquiera. Algunos, *ante la falta de práctica y el olvido de las propiedades básicas del álgebra, como las propiedades uniformes, recurrieron a la construcción de modelos numéricos (sus IPC) para decidir qué transformaciones realizar*. Cuando explicamos las propiedades uniformes en la escuela media, lo hacemos generalmente en forma rápida debido a lo obvias que se nos presentan. Ningún estudiante afirma no entenderlas. No hay solicitudes de reiteración ni exclamaciones de rechazo. Sin embargo, pocos son los que las aplican luego explícitamente. La necesidad de trabajar rápidamente lleva a docentes y alumnos al reemplazo inmediato por los “pasajes de un miembro a otro”. En los campos conceptuales de muchos alumnos sólo quedan esas reglas de aplicación mecánica, cuya evocación está desprovista de justificación matemática. El aprendizaje necesitará entonces nuevas explicaciones, las que, en muchos casos, debido a la falta de tiempo, consistirán en la reiteración directa de las mismas reglas que provocaron los errores. No afirmamos aquí que las propiedades uniformes ni los “pasajes de términos” sean inapropiados para las primeras enseñanzas. Tampoco pretendemos presentar la mejor forma de enseñar a resolver ecuaciones. Sólo estamos convencidos de que la posibilidad de justificar las transformaciones algebraicas, elemento central que diferencia el accionar de un experto del de un estudiante secundario, viabiliza el aprendizaje deseado.

Ejercitación previa, complementaria y de proyección

•Primero numera según un orden de resolución correcto y luego resuelve:

$$\mathbf{20 - (18 - 9 - 2 \,.\, 3) \,.\, 7 + 100 : 50 + 50 =}$$

Respuesta:

$$26 \overset{5}{-} (18 \overset{2}{-} 9 \overset{3}{-} 2 \overset{1}{.} 3) \overset{4}{.} 7 \overset{6}{+} 100 \overset{4}{:} 50 \overset{7}{+} 50 = 26 - (18 - 9 - 6) \,.\, 7 + 100 : 50 + 50 =$$

$$= 26 - 3 \,.\, 7 + 100 : 50 + 50 =$$

$$= 26 - 21 + 2 + 50 = 57$$

•Escribe el número de orden según el cual resolverías las operaciones de la tabla si asignaras valores numéricos a las letras:

Ejemplo: $A \overset{5}{+} \dfrac{B}{\sqrt[3]{D \underset{2}{-} E \underset{1}{.} X}}^{4}$

$A + B \,.\, C^D$	$C + \sqrt{B + A : F}$	$\dfrac{F - M - P}{V} + E$	$\dfrac{M}{A + B.C - V.D}$	$D - A - \sqrt{M + B.C}$

• Coloca Verdadero o Falso en cada proposición:

a) $2 \overset{1}{+} 4 \overset{2}{+} 5 \;=\; 2 \overset{2}{+} 4 \overset{1}{+} 5$

b) $10 \overset{1}{-} 8 \overset{2}{-} 3 \;=\; 10 \overset{2}{-} 8 \overset{1}{-} 3$

c) $a : b : c : d \;=\; a \overset{1}{:} b \overset{2}{:} c \overset{3}{:} d$

d) $10 + (40 - 2 \,.\, 8) : 2 \;=\; 10 \overset{4}{+} 40 \overset{3}{-} 2 \overset{2}{.} 8 \overset{1}{:} 2$

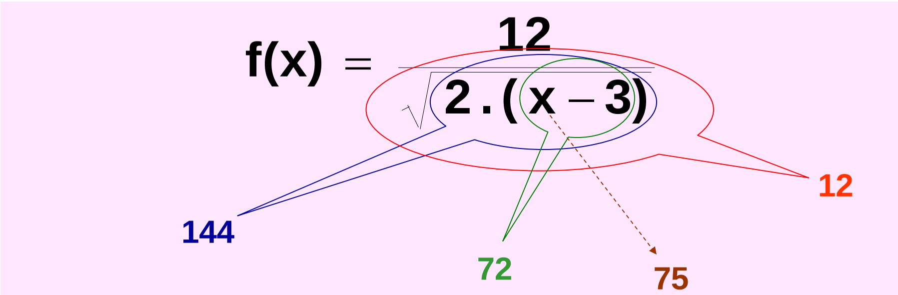
• Agrega los paréntesis para que el ejercicio siguiente sea resuelto según la numeración indicada. Luego resuélvelo:

$$29 \underset{4}{-} 6 \underset{5}{+} 8 \underset{3}{:} 15 \underset{1}{-} 9 \underset{2}{-} 2 \underset{6}{+} 6 \underset{3}{.} 10 \underset{1}{+} 2 \;=$$

• Define por extensión los conjuntos Dominio e Imagen de la siguiente función. El referencial es el conjunto de los números naturales (con el cero).

$$f(x) = \frac{12}{\sqrt{2\,.\,(x-3)}}$$

¿Cuáles son los divisores naturales de 12?: **1 y 12, 2 y 6, 3 y 4**



Si el divisor es 12

¿Cuál es el radicando? **Respuesta: 144**

¿Qué número por 2 da 144? **Respuesta: 72**

¿Qué número menos 3 da 72? **Respuesta: 75**

Así se van construyendo los conjuntos Dominio e Imagen siguientes:

Dom f = { 75, 5, 21, 11 } **Im f = { 1, 6, 2, 3 }**